УДК 514.174.3+519.65

АППРОКСИМАЦИЯ ГРАДИЕНТА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ Ф-ТРИАНГУЛЯЦИИ

Е.Г. Григорьева[1], В.А. Клячин[2]

1 *e_grigoreva@mail.ru*; Волгоградский государственный университет
2 *klchnv@mail.ru*; Волгоградский государственный университет

В работе вводится класс Ф-триангуляций конечного множества P точек в $\mathbb{R}^n$, аналогичных классической триангуляции Делоне. Такие триангуляции строятся исходя из условия пустого пересечения с множеством P внутренности всякого выпуклого множества из заданного семейства выпуклых, ограниченных множеств, граница которого содержит вершины симплекса триангуляции. В таком случае классическая триангуляция Делоне соответствует семейству всех шаров в $\mathbb{R}^n$. В статье продемонстрировано использование Ф-триангуляций для получения оценок погрешности аппроксимации производных C^2-гладких функций кусочно-линейными функциями.

Ключевые слова: триангуляция Делоне, условие пустой сферы, семейства выпуклых множеств, кусочно-линейная аппроксимация.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан конечный набор точек $P = \{p_i\}, i = 1, \dots, N$. Для функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ставится задача о приближенном вычислении ее производных по известным значениям функции в точках p_i. Одним из методов решения такой задачи является метод, основанный на построении триангуляции T множества точек P – системы симплексов с вершинами из P, которые попарно не пересекаются по внутренним точкам. Если такой симплекс $S \in T$ имеет вершины $p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_n} \in P$, то можно найти функцию вида $f_S(x) = \langle b, x\rangle + c$ такую, что

$$f(p_{i_k}) = f_S(p_{i_k}), \quad k = 0, \dots, n.$$

Тогда приближенным значением градиента $\nabla f(x)$ для точек $x \in S$ можно считать значение градиента этой линейной функции $\nabla f_S(x)$. Напомним, что триангуляция T называется триангуляцией Делоне [1] если выполнено следующее условие пустоты сферы: для всякого симплекса $S \in T$ его описанная сфера не содержит внутри себя точек набора P.

Введем обозначение

$$\delta_S(f) = \max_{x\in S} |\nabla f(x) - \nabla f_S(x)| \tag{1}$$

для абсолютной погрешности вычисления градиента на симплексе S указанным выше способом.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство Ф строго выпуклых ограниченных множеств с непустой внутренностью. Пусть S произвольный невырожденный симплекс. Определим *охватывающее* множество $B \in \Phi$ (если оно существует) из данного семейства как множество, чья граница содержит вершины симплекса (а, значит содержит весь симплекс в силу выпуклости B). В общем случае таких охватывающих множеств из данного семейства Ф может быть несколько.

Определение 1. *Рассмотрим произвольную триангуляцию конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что эта триангуляция является Ф-триангуляцией, ес-*

ли для любого симплекса S этой триангуляции внутренность любого охватывающего множества B не содержит вершин других симплексов.

Заметим, что если семейство Φ представляет собой семейство D всех шаров в $\mathbb{R}^n$, то вышеприведенное определение совпадает с определением триангуляции Делоне. В работе [2] было доказано существование Φ-триангуляции конечного множества точек при условии, что семейство Φ обладает следующим свойством: для любого невырожденного симплекса S в семействе Φ существует, и при том только, одно охватывающее множество $B(S)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие на семейство выпуклых множеств является выполненным. В таком случае охватывающее множество будем обозначать через $B(S)$.

Пример 1. Рассмотрим гладкую, строго выпуклую вниз функцию $x_{n+1} = \Psi(x)$, определенную во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такую, что

$$\frac{\Psi(x)}{|x|} \to +\infty \text{ при } x \to \infty. \tag{2}$$

При выполнении этого условия пересечение графика функции $\Psi(x)$ с произвольной не вертикальной плоскостью Π представляет собой выпуклую компактную $(n-1)$-мерную поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим для любых $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$

$$\Phi_\Psi(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \Psi(y) \le \Psi(x) + \langle \nabla\Psi(x), y - x\rangle + r\}. \tag{3}$$

В силу свойства (2) и выпуклости $\Psi(x)$ множества $\Phi_\Psi(x,r)$ образуют семейство $\{\Phi_\Psi\}$ выпуклых компактных множеств. В [3] было показано, что для всякого невырожденного симплекса S можно построить единственное охватывающее множество из этого семейства. Это множество будем обозначать через $B_\Psi(S)$. Также введем обозначение $x_\Psi = x_\Psi(S)$ точки, для которой при некотором $r > 0$ выполнено $B_\Psi(S) = \Phi_\Psi(x_\Psi, r)$. Триангуляции, соответствующие такого рода семействам выпуклых множеств, называются регулярными триангуляциями [4]. Совпадает ли класс всех Φ-триангуляций с классом регулярных триангуляций, авторам не известно.

Требование «пустоты» в определении 1 можно несколько ослабить.

Определение 2. *Рассмотрим произвольную триангуляцию конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое целое неотрицательное k. Будем говорить, что эта триангуляция является Φ-триангуляцией кратности k, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность любого охватывающего множества B содержит не более k вершин других симплексов.*

Рассмотрим строго выпуклую и гладкую функцию $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ для которой выполнено условие (2). Также предположим, что для этой функции найдутся положительные числа λ, Λ, такие что неравенства

$$g(x) \le \langle x - y, \nabla g(y)\rangle + \Lambda|x-y|^2, \tag{4}$$

$$g(x) \ge \langle x - y, \nabla g(y)\rangle + \lambda|x-y|^2 \tag{5}$$

выполнены для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что если для выпуклой функции $g(x)$ выполнено неравенство (5), то для этой функции имеет место свойство (2).

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ локально конечное множество A, являющееся ε-сетью для некоторого $\varepsilon > 0$. Построим его Φ-триангуляцию T по семейству $\{\Phi_g\}$. Следующая теорема дает оценку погрешности производных для выпуклых вниз функций с указанными выше свойствами на соответствующей этой функции триангуляции.

Теорема 1. *Имеет место оценка*

$$\sup_{S\in T}\delta_S(g)\le C(n)\Lambda\sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\cdot\varepsilon. \tag{6}$$

Полученную в теореме 1 оценку можно интерпретировать как погрешность аппроксимации нормалей специального случая выпуклых множеств в $\mathbb{R}^{n+1}$, ограниченных графиком выпуклой функции. Отметим, что в [5] – [6] рассматриваются проблемы аппроксимации выпуклых множеств многогранниками, однако не исследуется аппроксимация нормалей к границе выпуклого множества.

Пусть $B(x,t)$ обозначает открытый шар радиуса $t>0$ с центром в точке $x\in\mathbb{R}^n$. Неравенство (6), полученное в теореме 1, дает оценку погрешности аппроксимации градиента выпуклой функции в подходящей для этой функции триангуляции. Однако можно получить аналогичную оценку и для триангуляции, не так сильно связанной с функцией $g(x)$. Для формулировки нам понадобится следующая величина

$$\eta_{k,n}=\inf_{q_1,\ldots,q_k\in B(0,1)}\ \sup_{y_0\in B(0,1)}\{\rho: B(y_0,\rho)\subset B(0,1)\setminus\{q_1,\ldots,q_k\}\}.$$

Геометрический смысл величины $\eta_{k,n}$ состоит в том, что какие бы k точек из $B(0,1)$ ни взять, найдется открытый шар радиуса $\eta_{k,n}$, лежащий внутри шара $B(0,1)$ и не содержащий заданных k точек. Ясно, что для всех k,n выполнено $\eta_{k,n}>0$ и $\eta_{k,n}\to 0$ при $k\to+\infty$.

Теорема 2. *Пусть $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ строго выпуклая функция, для которой выполнены неравенства (4),(5). Рассмотрим триангуляцию T локально конечной ε-сети $A\subset\mathbb{R}^n$, являющуюся Φ-триангуляцией кратности k относительно семейства $\{\Phi_g\}$. Имеет место оценка*

$$\sup_{S\in T}\delta_S(g)\le C(n)\Lambda\sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\cdot\frac{\varepsilon}{\eta_{k,n}}.$$

В следующей теореме дается оценка погрешности для выпуклой функции на Φ-триангуляции, построенной по семейству вида (3).

Теорема 3. *Пусть $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ строго выпуклые функции, для которых выполнены неравенства (4),(5) с постоянными λ_g,Λ_g и λ_h,Λ_h соответственно. Рассмотрим триангуляцию T локально конечной ε-сети $A\subset\mathbb{R}^n$, являющуюся Φ-триангуляцией относительно семейства $\{\Phi_h\}$. Имеет место оценка*

$$\delta_S(g)\le C(n)\Lambda_g\sqrt{\frac{\Lambda_h}{\lambda_h}}\cdot\varepsilon+C(n)\Lambda_g|x_g(S)-x_h(S)|.$$

Литература

1. Скворцов А.В., Мирза Н.С. *Алгоритмы построения и анализа триангуляции.* – Томск: Изд. Томск. ун-та, 2006. – 168 с.

2. Клячин В.А. *Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества* // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2015. – Т. 28, № 3. – С. 27–33.

3. Клячин В.А. *Экстремальные свойства триангуляции, основанной на условии пустого выпуклого множества* // Сибирские электронные математические известия. – 2015. – Т. 12. – С. 991–997.

4. Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М. *Дискриминанты многочленов от многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона* // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2, Вып. 3. – С. 1–62.

5. Каменев Г.К., Поспелов А.И. *Полиэдральная аппроксимация выпуклых компактных тел методами наполнения* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 818–828.

6. Бронштейн Е.М. *Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 22. – С. 5–37.

APPROXIMATION OF GRADIENT OF THE CONVEX FUNCTIONS BASED ON Φ-TRIANGULATION

E.G. Grigorieva, V.A. Klyachin

The class of Φ-triangulations of a finite set of P points in $\mathbb{R}^n$ similar to classical Delaunay triangulation is introduced. Such triangulations are constructed using the condition of empty intersection with the set P of the interior of every convex set from a given family of convex, bounded sets whose boundary contains vertices of the simplex of the triangulation. In this case, the classical Delaunay triangulation corresponds to the family of all balls in $\mathbb{R}^n$. We use of Φ-triangulations to obtain estimates of the error of approximation of the derivatives of C^2-smooth convex functions by piecewise linear functions.

Keywords: Delaunay triangulation, empty sphere condition, convex set families, piecewise approximation.

УДК 512.573, 512.562

$\pi_1(K)$–ГРАДУИРОВАННЫЕ C^*–АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЧАСТИЧНО–УПОРЯДОЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ

С.А. Григорян[1], Е.В. Липачева[2], А.С. Ситдиков[3]

1 *gsuren@inbox.ru*; Казанский государственный энергетический университет
2 *elipacheva@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет
3 *airat_vm@rambler.ru*; Казанский государственный энергетический университет

В работе строится C^*–алгебра над частично–упорядоченным множеством, в каждой точке которого задано гильбертово пространство. Доказывается, что эта алгебра является градуированной по 1-й гомотопической фундаментальной группе данного частично-упорядоченного множества.

Ключевые слова: C^*–алгебра, градуированная C^*–алгебра, полугруппа путей, частично-упорядоченное множество, 1-я гомотопическая фундаментальная группа, оператор частичной изометрии.